# Números complejos en geometría

Tomás Cantú, Diego Caballero

Mayo 2022

## §1 Cosas básicas

Un número complejo se puede ver de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $i$ un número tal que $i^2 = -1$.

Algebraicamente, se pueden sumar y multiplicar complejos como cualquier binomio:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Geométricamente, se pueden ver los complejos como puntos en el plano, como vectores, o como rotomotecias. Asociamos el complejo $z = a + bi$ al punto $(a, b)$, al vector $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ y a la rotomotecia de centro $(0, 0)$ que manda $(0, 1) \to (a, b)$.

Cualquier complejo $z$ se puede expresar de la forma $z = re^{i\theta}$, donde $r, \theta \in \mathbb{R}$ son la magnitud y el ángulo del vector asociado. Si expresamos $z = a + bi$, vemos que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\theta = \arctan \frac{b}{a}$. La fórmula de Euler relaciona la forma polar y la forma cartesiana:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin \theta$$

Observa que $e^{i\theta}$ siempre tiene magnitud igual a 1. $r, \theta$ se representan a veces como

$$r = |z|$$
$$\theta = \arg z$$

Con la forma polar, observemos que el complejo $z = re^{i\theta}$ representa la rotomotecia con centro en el complejo 0 y que tiene razón $r$ y ángulo $\theta$. Geométricamente, la suma de complejos equivale a la suma de vectores: sumar por un complejo $a + bi$ es una traslación de $a$ unidades a la derecha y $b$ unidades hacia arriba. La multiplicación equivale a una rotomotecia. Es decir, multiplicar $x$ por $z$ equivale a estirar $x$ por $|z|$ y luego girarlo $\arg z$. Observa que al multiplicar dos complejos, las magnitudes se multiplican y los ángulos se suman:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

.

Para un número complejo $z$, el conjugado de $z = a + bi$ se expresa como $\overline{z} = a - bi$, y es la reflexión de $z$ por la recta real. Observa que sacar conjugados se comporta bonito respecto a las operaciones básicas:

$$\overline{y + z} = \overline{y} + \overline{z}$$
$$\overline{y - z} = \overline{y} - \overline{z}$$
$$\overline{yz} = \overline{y} \cdot \overline{z}$$
$$\overline{(y/z)} = \overline{y} / \overline{z}$$

Además, hay una relación entre la magnitud de un complejo y su conjugado:

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

## §2 Cosas fáciles de sacar

1. **Puntos medios**: El punto medio $M$ de $PQ$ es $m = \frac{p+q}{2}$
2. **Reflexión sobre un punto**: De manera similar, la reflexión $A'$ de $A$ sobre $B$ es $a' = 2b - a$.
3. **Reflexión sobre el origen**: La reflexión de $z$ sobre el origen es $-z$.

## §3 Círculo unitario

El círculo unitario es útil porque sus puntos tienen propiedades que simplifican muchas fórmulas. Si $z$ está en el círculo unitario, cumple lo siguiente

1. $|z| = 1$
2. $\overline{z} = \frac{1}{z}$
3. $z = e^{i\theta}$ para algún ángulo $\theta$

## §4 Formulas útiles

Generalmente, las fórmulas son fáciles de aplicar cuando la mayoría o todos los puntos están sobre el círculo unitario. Por esto, es esencial elegir el mejor arreglo posible antes de hacer cuentas.

### §4.1 Rectas y perpendiculares

**Lemma 4.1** (Perpendicularidad)
Sean $A, B, C, D$ puntos distintos. Las rectas $AB$ y $CD$ son perpendiculares si y solo si $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$, es decir,

$$\frac{d-c}{b-a} + \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = 0.$$

Esto sucede porque queremos que $90^\circ = \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$, que es equivalente a $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Si $A, B, C, D$ están sobre la circunferencia unitaria, $AB \perp CD$ si y solo si $ab+cd = 0$.

**Lemma 4.2** (Colinealidad)
Sean $A$, $B$, $C$ puntos distintos en el plano. Entonces, $A$, $B$, y $C$ son colineales si y solo si $\frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$, es decir:

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

**Lemma 4.3** (Reflexión respecto a un segmento)
La reflexión $W$ de $Z$ sobre la recta $AB$ tiene la ecuación

$$w = \frac{(a-b)\overline{z} + \overline{a}b - a\overline{b}}{\overline{a} - \overline{b}}.$$

En particular, si $A$ y $B$ están sobre la circunferencia unitaria, tenemos que

$$w = a + b - ab\overline{z}.$$

**Lemma 4.4** (Pie de perpendicular)
Sean $A$ y $B$ puntos sobre el círculo unitario, y $Z$ otro punto en el plano complejo. Por el lema anterior, el pie de perpendicular de $Z$ a $AB$ es

$$\frac{1}{2}(a + b + z - ab\overline{z}).$$

**Lemma 4.5** (Intersección de dos rectas)
Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ puntos en el plano complejo. Sea $P$ la intersección de $AB$ y $CD$. entonces,

$$p = \frac{(\overline{a}b - a\overline{b})(c-d) - (a-b)(\overline{c}d - c\overline{d})}{(\overline{a} - \overline{b})(c-d) - (a-b)(\overline{c} - \overline{d})}.$$

Generalmente esta fórmula es muy difícil de usar a menos que algún punto sea 0, o muchos de ellos estén sobre la circunferencia unitaria.

Si $A$, $B$, $C$, $D$ están sobre la circunferencia unitaria, entonces

$$p = \frac{(c+d)ab - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

Esta fórmula se puede utilizar aún cuando $A = B$ o $C = D$, creando así tangentes al círculo unitario.

## §4.2 Triángulos

Para un triángulo $ABC$ tal que el círculo unitario es su circuncírculo, los centros están dados por

1. **Circuncentro**: 0,
2. **Gravicentro**: $\frac{1}{3}(a + b + c)$. En general, el gravicentro $G$ de $P_1 P_1 \cdots P_k$es el promedio de los puntos. $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} p_i$.[1]
3. **Centro de nueve puntos**: $\frac{1}{2}(a + b + c)$
4. **Ortocentro**: $a + b + c$

[1]Esta condición sirve para cualquier triángulo, no debe estar en el círculo unitario.

**Lemma 4.6** (Incentro)

Sea $ABC$ un triángulo con vértices en el círculo unitario. Entonces, existen números complejos $x, y, z$ tales que

$$a = x^2, \quad b = y^2, \quad c = z^2.$$

Sean $D, E, F$ los puntos medios de los arcos $BC, CA, AB$, respectivamente. Entonces,

$$d = -yz, \quad e = -zx, \quad f = -xy.$$

Como $I$ es el ortocentro de $DEF$, su ecuación es $j = -(xy + yz + xz)$ [a]

[a] Usamos $j$ para el incentro, porque $i$ se confundiría con la unidad imaginaria.

**Lemma 4.7** (Área de un triángulo)

El área de un triángulo $ABC$ (con $A, B, C$ en contra del sentido de las manecillas del reloj visto desde arriba) es:

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

También, $A$, $B$ y $C$ son colineales si y solo si este determinante es 0. A veces, es más fácil usar esta fórmula que la de colinealidad.

**Lemma 4.8** (Circuncentro)

Sean $X, Y, Z$ puntos en el plano. El circuncentro $O$ de $\triangle XYZ$ es

$$o = \begin{vmatrix} x & x\overline{x} & 1 \\ y & y\overline{y} & 1 \\ z & z\overline{z} & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}.$$

Es buena idea trasladar primero el plano para que $z = 0$ y luego aplicar la fórmula. Si $x' = x - z$, y $y' = y - z$, tenemos que

$$o - z = \frac{x'y'(\overline{x'} - \overline{y'})}{\overline{x'}y' - x'\overline{y'}}.$$

**Lemma 4.9** (Semejanza)

Dos triángulos $ABC$ y $XYZ$ son semejantes si y solo si

$$\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## §4.3 Círculos

La debilidad de los números complejos son los problemas con más de dos círculos. Aún así, hay maneras de lidiar con ellos.

**Lemma 4.10** (Cíclicos)
Sean $A$, $B$, $C$, $D$ puntos distintos. Entonces, $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \div \left(\frac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R}.$$

Esto sucede ya que $ABCD$ es cíclico si y solo si $\angle ABC = \angle ADC \iff \arg\left(\frac{b-a}{b-c}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{d-c}\right) \iff \left(\frac{c-a}{c-b}\right) \div \left(\frac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R}$.

**Lemma 4.11** (Intersección de tangentes)
Sea $P$ la intersección de las tangentes al círculo unitario en dos puntos $A$ y $B$. Por el Lema 3.5,

$$p = \frac{2ab}{a+b}.$$

Esta fórmula se conoce como la fórmula del cono de helado, y es muy útil.

**Lemma 4.12** (Rotomotecia)
Si $W$ es un punto en el plano complejo, entonces una rotomotecia $f$ del plano complejo con centro en $W$ se puede escribir de la forma

$$f(z) = \alpha(z-w) + w,$$

donde $\alpha$ es un número complejo. Podemos pensar que $z - w$ es una traslación del plano en la que el punto $w$ va al origen, y al multiplicar por $\alpha$, rotamos el plano $\arg \alpha$ y hacemos una homotecia de razón $|\alpha|$. Luego, al sumar $w$ de nuevo, $w$ regresa a su lugar original, y el resto de los puntos mantienen la rotomotecia.

**Lemma 4.13** (Centro de rotomotecia)
Sea $Y$ el centro de rotomotecia que manda $AB$ a $CD$. Entonces,

$$y = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}.$$

Sea $X$ el punto de intersección de $AC$ y $BD$. Podemos interpretar el resultado de otra manera: la intersección de los circuncírculos de $ABX$ y $CDX$ es $Y$.

Entonces, esta fórmula sirve para calcular la intersección de dos círculos en algunos casos.

**Lemma 4.14** (Punto sobre una cuerda)
Un punto $P$ sobre la cuerda $AB$ del círculo unitario cumple

$$p + ab\overline{p} = a + b.$$

**Lemma 4.15** (Segunda intersección al círculo unitario)
Si $A$ es un punto del círculo unitario y $B$ es un punto que no está en el círculo unitario, entonces la segunda intersección de $AB$ con el círculo unitario es

$$\frac{a-b}{a\overline{b}-1}.$$

Esta fórmula se deriva de la anterior.

## §5 Resolviendo problemas con números complejos

Resolver problemas con números complejos generalmente es un proceso de dos partes. Primero, debemos elegir nuestro círculo unitario, y luego calcular los puntos del problema para llegar a la conclusión.

Aunque no lo parezca, la parte más importante es la primera. Mientras mejor sea nuestra elección del círculo unitario y variables, menos cuentas debemos hacer. Para un ejemplo claro de esto, tomamos dos soluciones de un mismo problema de la shortlist:

**ISL 2016 G4:** Sea $ABC$ un triángulo con $AB = AC \neq BC$ y sea $I$ su incentro. $BI$ corta a $AC$ en $D$, y la perpendicular por $D$ a $AC$ corta a $AI$ en $E$. Demuestra que la reflexión de $I$ por $AC$ está sobre el circuncírculo de $BDE$.

Existen dos maneras de resolver este problema con números complejos, una "fácil" y otra difícil.

**Solución 1, Evan Chen**: La manera "fácil" es tomar al incírculo de $ABC$ como el círculo unitario (digamos $\omega$. Sean $P$, $Q$ y $R$ los puntos de tangencia de $\omega$ con $BC, CA$ y $AB$, respectivamente. Entonces, podemos asumir que $p = 1$, y $\overline{q} = r$. Esto hace que $ABC$ sea un triángulo isósceles (¿Por qué?). Luego, podemos calcular $B$ mediante el Lema 4.11, y tomar puntos $U$ y $V$ que sean las intersecciones de $BI$ con $\omega$, que cumplen $u = -v$, y $uv = -pr$ (por el Lema 4.6). De esto, podemos calcular $D = UV \cap QQ$, usando el Lema 4.5. Vemos que $ED \perp DQ$, entonces podemos usar el lema de perpendicularidad para encontrar $E$. Luego, $I'$, la reflexión de $I$ por $Q$ es $2q$, entonces tenemos todos los puntos. Aplicando el Lema 4.10 a $BDEI'$, podemos concluir.

**Solución 2, usuario yayups**: Si usamos el circuncírculo de $ABC$ como el círculo unitario, la solución es más o menos similar, pero las cuentas son más complicadas, ya que la construcción involucra la intersección de $BI$ con $AC$ (aunque podemos evitar esto usando el punto medio del arco $AC$ en vez de $I$, para usar la versión fácil del Lema 4.5).

En fin, ambas soluciones requieren bastantes cuentas, pero la primera es más fácil:
Solución 1: https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480714p8639402
Solución 2: https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480714p11198213

## §6 Problemas :D

1. Sea $ABC$ un triángulo con circuncentro $O$. $X, Y, Z$ son las reflexiones de $O$ sobre $BC, CA, AB$. Demuestra que $AX, BY, CZ$ concurren.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean $H_A, H_B, H_C, HD$ los ortocentros de $BCD, ACD, ABD, ABC$. Demuestra que $AH_A, BH_B, CH_C, DH_D$ concurren.

3. Sean $BCDE, CAFG, ABHI$ cuadrados construidos exteriormente sobre los lados de $\triangle ABC$. Sean $P, Q$ tales que $CDPG$ y $BEQH$ son paralelogramos. Demuestra que $\triangle APQ$ es isósceles y rectángulo.

4. Sean $ABC$ y $PQR$ dos triángulos cualesquiera, y sean $L, M, N$ los puntos medios de $AP, BQ, CR$ respectivamente. Demuestra que los gravicentros de $ABC, PQR, LMN$ son colineales.

5. Sea $A_1A_2A_3A_4$ un cuadrilátero cíclico. Sea $\Omega_j$ la circunferencia de los nueve puntos de $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ para $j = 1, 2, 3, 4 \pmod 4$. Prueba que $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$, $\Omega_4$ tienen un punto en común.

6. (Napoleón) Sea $ABC$ un triángulo. Se construyen triángulos equiláteros $XBA$, $YCB$, $ZAC$ con centros $O_C, O_A, O_B$ hacia afuera del triángulo. Demuestra que $O_CO_AO_B$ es equilátero y su centro es el gravicentro de $ABC$.

7. Demuestra que un triángulo $ABC$ es equilátero si y solo si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

8. Sean $E, F, G, H$ los puntos medios de los lados $AB, BC, CD, DA$ de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Prueba que $AB$ y $CD$ son perpendiculares si y solo si $BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2)$

9. (Recta de Simson) Sea $ABC$ un triángulo con circuncentro $\omega$. Sea $P$ un punto arbitrario sobre $\omega$, y $X$, $Y$, $Z$ los pies de altura de $P$ a $BC$, $CA$, $AB$, respectivamente. Sea $H$ el ortocentro de $ABC$. Muestra que el punto medio de $PH$, $X, Y$, y $Z$ son colineales.

10. Sea $ABC$ un triángulo con incentro $I$. Prueba que las rectas de Euler de los triángulos $AIB, BIC, CIA, ABC$ concurren

11. Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono regular inscrito en un círculo con centro $O$ y radio $R$. Sea $M$ un punto cualquiera. Demuestra que

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 = n(OM^2 + R^2)$$

12. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con incírculo $\omega$. Prueba que los puntos medios de $AC$ y $BD$ y el centro de $\omega$ son colineales.

13. Sea $O$ el circuncentro de $ABC$. Una recta $\ell$ por $O$ corta a $AB, AC$ en $X, Y$ respectivamente. $M, N$ son los puntos medios de $BY, CX$. Demuestra que $\angle MON = \angle BAC$

14. Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con $AB > BC$ y $AC > BC$. Sean $O, H$ el circuncentro y ortocentro del triángulo. El circuncírculo de $AHC$ interseca a $AB$ en $A, M$. El circuncírculo de $AHB$ intersecta a $AC$ en $A, N$. Demuestra que el circuncentro del triángulo $MNH$ está en $OH$.

## §7 Problemas X.X

Estos problemas requiren más experiencia, pero se pueden resolver con complejos.

1. Los puntos $A_1$, $B_1$, $C_1$ se escogen sobre los lados $BC$, $CA$, $AB$ del triángulo $ABC$ respectivamente. Los ciruncírculos de los triángulos $AB_1C_1$, $BC_1A_1$, $CA_1B_1$ cortan al circuncírculo de $ABC$ de nuevo en $A_2$, $B_2$, $C_2$ respectivamente ($A_2 \neq A, B_2 \neq B, C_2 \neq C$). Los puntos $A_3$, $B_3$, $C_3$ son las reflexiones de $A_1$, $B_1$, $C_1$ respecto a los puntos medios de $BC$, $CA$, $AB$ respectivamente. Demuestra que los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$ son semejantes.

2. Sea $ABC$ un triángulo con $AB = AC \neq BC$ y sea $I$ su incentro. $BI$ corta a $AC$ en $D$, y la perpendicular por $D$ a $AC$ corta a $AI$ en $E$. Demuestra que la reflexión de $I$ por $AC$ está sobre el circuncírculo de $BDE$.

3. Sea $T$ un punto dentro del triángulo $ABC$. Sean $A_1$, $B_1, C_1$ las reflexiones de $T$ por $BC$, $CA$, $AB$, respectivamente. Sea $\Omega$ el circuncírculo de $A_1B_1C_1$. Las rectas $A_1T$, $B_1T, C_1T$ cortan a $\Omega$ por segunda vez en $A_2$, $B_2, C_2$, respectivamente. Demuestra que $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ se cortan sobre $\Omega$.

4. Sea $ABC$ un triángulo acutángulo de circuncírculo $\Gamma$. Sea $\ell$ una recta tangente a $\Gamma$, y sean $\ell_a, \ell_b$, $\ell_c$ las reflexiones de $\ell$ por $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente. Demuestra que el circuncírculo del triángulo formado por $\ell_a, \ell_b$, $\ell_c$ es tangente a $\Gamma$.

5. Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con circuncírculo $\Omega$. Las bisectrices de $\angle B$ y $\angle C$ cortan a $\Omega$ de nuevo en $M$ y $N$ y se cortan en $I$. Sean $M'$ y $N'$ las reflexiones de $M$ y $N$ por $AC$ y $AB$. Prueba que el circuncentro de $IM'N'$ está sobre la altura desde $A$ sobre $BC$.

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Las mediatrices de $AB$ y $CD$ se cortan en $Y$. Sea $X$ un punto dentro de $ABCD$ tal que $\measuredangle ADX = \measuredangle BCX < 90°$ y $\measuredangle DAX = \measuredangle CBX < 90°$. Demuestra que $\measuredangle AYB = 2 \cdot \measuredangle ADX$.

7. Sean $AH_1, BH_2, CH_3$ las alturas del triángulo acutángulo $ABC$. Su incírculo corta a los lados $BC, AC$ y $AB$ en $T_1, T_2$ y $T_3$ respectivamente. Considera las reflexiones de $H_1H_2, H_2H_3$ y $H_3H_1$ respecto a las rectas $T_1T_2, T_2T_3$ y $T_3T_1$ respectivamente. Demuestra que dichas imágenes forman un triángulo con vértices sobre el incírculo de $ABC$.